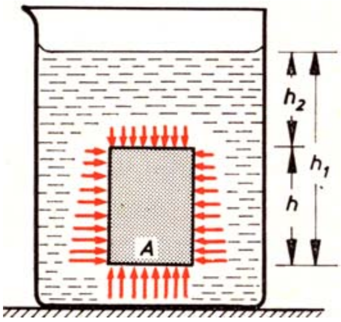
Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

8.3. Auftrieb (*Das Gesetz des Archimedes)*

Der in 8.1.2 behandelte Schweredruck in (ruhenden) Flüssigkeiten trifft nicht nur die Wände eines Flüssigkeitsbehälters, sondern auch jeden Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht. Der Druck und die entsprechenden Druckkräfte nehmen nach unten zu. Deshalb ist ihre Resultierende nicht Null, obwohl sie von allen Seiten auf den Körper drücken.

Am einfachsten kann man die Resultierende bei einem prismatischen Körper mit der Grundfläche *A* und der Höhe *h* berechnen (vgl. Abbildung). Der Druck ist durch die Pfeile sichtbar gemacht. Die in gleicher Höhe angreifenden Anteile der Seitendruckkräfte heben sich gegenseitig auf. Dagegen wirkt auf die Grundfläche nach oben eine stärkere Kraft als auf die Deckfläche nach unten.



Deshalb ist die Resultierende F_A, die **Auftriebskraft** oder einfach der **Auftrieb** nach oben gerichtet:

$$\begin{aligned} F_A &= p_{h1} \cdot A - p_{h2} \cdot A \\ &= h_1 \cdot \rho_{Fl} \cdot g \cdot A - h_2 \cdot \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \\ &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot (h_1 - h_2) \\ &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot h_K \end{aligned}$$

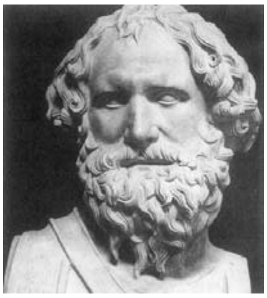
Das Produkt $A \cdot h_K$ ist das Volumen des prismatischen Körpers und gleichzeitig das Volumen der von diesem Körper verdrängten Flüssigkeit V_{Fl}. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot h_K \\ &= V_{Fl} \cdot \rho_{Fl} \cdot g \\ &= F_{g\_Flüssigkeit} \end{aligned}$$

Diese Gesetzmäßigkeit bezeichnet man als das Archimedische Gesetz[1]:

Beim Eintauchen in eine Flüssigkeit erfährt jeder Körper eine nach oben gerichtete Auftriebskraft. Diese ist dem Betrag nach gleich der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

Anm.:
Dieses Gesetz gilt auch für in Luft (allgemein in einem beliebigen Medium) befindliche Körper, z.B. Luftballon, Luftbläschen im Sekt, ...



Mit Hilfe der Integralrechnung lässt sich nachweisen, dass dieses Ergebnis auch für beliebig geformte Körper gültig ist.

[1] **Archimedes** (griechisch Αρχιμήδης) **von Syrakus** (* um 287 v. Chr. vermutlich in Syrakus auf Sizilien; † 212 v. Chr. ebenda) war ein antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike, und seine Werke waren auch im 16. und 17. Jahrhundert noch bei der Entwicklung der höheren Analysis von Bedeutung

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Wie tief taucht ein Ponton von 5680 kg Masse ein (L = 6,3 m; B = 2,9 m; H = 1,4 m)?

$$F_A = F_{g\_Ponton}$$

$$m_{Wasser,verdrängt} \cdot g = m_{Ponton} \cdot g$$

$$L_{Ponton} \cdot B_{Ponton} \cdot T_{Ponton} \cdot \rho_{Wasser} = m_{Ponton}$$

$$T_{Ponton} = \frac{m_{Ponton}}{L_{Ponton} \cdot B_{Ponton} \cdot \rho_{Wasser}}$$

$$= \frac{5680\,kg}{63\,dm \cdot 29\,dm \cdot 1\frac{kg}{dm^3}}$$

$$= 3{,}1089...\,dm$$

$$\approx 311\,mm$$

Ein Schiff von 27500 tdw und einer WL-Fläche von 4200 m² fährt aus Flusswasser in Seewasser (ρ = 1,03). Wie viel taucht es auf?

$$\Delta T = T_{Flusswasser} - T_{Seewasser}$$

$$= \frac{m_{Schiff}}{A_{CWL} \cdot \rho_{Flusswasser}} - \frac{m_{Schiff}}{A_{CWL} \cdot \rho_{Seewasser}}$$

$$= \frac{m_{Schiff}}{A_{CWL}} \cdot \left(\frac{1}{\rho_{Flusswasser}} - \frac{1}{\rho_{Seewasser}} \right)$$

$$= \frac{27.500.000\,kg}{4.200\,m^2} \cdot \left(\frac{1}{1000\frac{kg}{m^3}} - \frac{1}{1030\frac{kg}{m^3}} \right)$$

$$= 0{,}187239...\ m$$

$$\approx 187\,mm$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

An den Ecken einer 1 mm dicken Stahlblechtafel 600/500 mm werden 4 Quadrate 80/80 mm herausgeschnitten. Nach Hochkanten und Verschweißen der 4 recht-eckigen Flächen entsteht ein offener Kasten.

a) Berechnen Sie das Gewicht des Kastens.

b) Wie tief taucht der Kasten ins Wasser (ρ = 1 kg/dm³).ein?

a) Berechnung des Gewichts des Kasten (nicht berücksichtigt: Masse der Schweißnähte)

$$\begin{aligned}
F_{g_Kasten} &= m_{Kasten} \cdot g \\
&= A_{Stahlblech} \cdot s_{Stahlblech} \cdot \rho_{Stahl} \cdot g \\
&= (A_{0_Stahlblech} - 4 \cdot A_{Ecken_Stahlblech}) \cdot s_{Stahlblech} \cdot \rho_{Stahl} \cdot g \\
&= (6dm \cdot 5dm - 4 \cdot 0{,}8dm \cdot 0{,}8dm) \cdot 0{,}01dem \cdot 7{,}85\frac{kg}{dm^3} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \\
&\underline{\underline{= 21{,}13N}}
\end{aligned}$$

b) Tiefgang des Kastens

$$\begin{aligned}
T_{Kasten} &= \frac{m_{Kasten}}{L_{Kasten} \cdot B_{Kasten} \cdot \rho_{Wasser}} \\
&= \frac{29{,}13/9{,}81kg}{44{,}2\ dm \cdot 34{,}2\ dm \cdot 1\frac{kg}{dm^3}} \\
&= 0{,}00142489...\ dm \\
&\underline{\underline{\approx 0{,}14\ mm}}
\end{aligned}$$

Die Verdrängung eines Schiffes beträgt 3200 m³. Ermitteln Sie die Auftriebskraft, die das Schiff erfährt, wenn es sich in der Ostsee befindet (ρ_{Ostsee} = 1,025 t/m³).

$$\begin{aligned}
F_A &= V_{Wasser,verdrängt} \cdot \rho_{Ostseewasser} \cdot g \\
&= 3.200\ m^3 \cdot 1025\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \\
&= 32.176.800\ N \\
&\underline{\underline{\approx 32{,}18\ MN}}
\end{aligned}$$

fit4work

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Wie viel Kork der Masse m_{Kork} ($\rho_{Kork} = 0{,}24 \cdot 10^3$ kg/m³) ist für eine Schwimmweste notwendig, damit eine Person m_{Mensch} = 75 kg ($\rho_{Mensch} = 1{,}1 \cdot 10^3$ kg/m³) so im Wasser schwimmt, dass 1/6 seines Körpervolumens herausragen kann?

$$F_A = F_{g\_Kork} + F_{g\_Mensch}$$

$$V_{Wasser,verdrängt} \cdot \rho_{Wasser} \cdot g = m_{Kork} \cdot g + m_{Mensch} \cdot g$$

$$V_{Wasser,verdrängt} \cdot \rho_{Wasser} = m_{Kork} + m_{Mensch}$$

$$m_{Kork} = V_{Wasser,verdrängt} \cdot \rho_{Wasser} - m_{Mensch}$$

$$= V_{Kork} \cdot \rho_{Wasser} + \frac{5}{6} \cdot V_{Mensch} \cdot \rho_{Wasser} - m_{Mensch}$$

$$m_{Kork} - V_{Kork} \cdot \rho_{Wasser} = \frac{5}{6} \cdot V_{Mensch} \cdot \rho_{Wasser} - m_{Mensch}$$

$$m_{Kork} - \frac{m_{Kork}}{\rho_{Kork}} \cdot \rho_{Wasser} = \frac{5}{6} \cdot \frac{m_{Mensch}}{\rho_{Mensch}} \cdot \rho_{Wasser} - m_{Mensch}$$

$$m_{Kork} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Wasser}}{\rho_{Kork}}\right) = m_{Mensch} \cdot \left(\frac{5 \cdot \rho_{Wasser}}{6 \cdot \rho_{Mensch}} - 1\right)$$

$$m_{Kork} = m_{Mensch} \cdot \frac{(5 \cdot \rho_{Wasser} - 6 \cdot \rho_{Mensch}) \cdot \rho_{Kork}}{6 \cdot \rho_{Mensch} \cdot (\rho_{Kork} - \rho_{Wasser})}$$

$$= 75\ kg \cdot \frac{(5 \cdot 1 - 6 \cdot 1{,}1)\frac{kg}{dm^3} \cdot 0{,}24\frac{kg}{dm^3}}{6 \cdot 1{,}1\frac{kg}{dm^3} \cdot (0{,}24 - 1)\frac{kg}{dm^3}}$$

$$= 5{,}741626\ldots\ kg$$

$$\approx \underline{\underline{5{,}742\ kg}}$$

Um ein gesunkenes Schiff zu heben, werden 30 Behälter von je 2 m³ Volumen und je 150 kg Eigenmasse an dem Wrack befestigt, wodurch es eben zu steigen beginnt. Wie schwer ist dieses Schiff im Wasser ($\rho_{Wasser} = 1{,}03 \cdot 10^3$ kg/m³)?

Vorbemerkung:
Wir vernachlässigen, dass aufgrund des Volumens des Materials des Schiffes eine zusätzliche Auftriebskraft wirksam wird. Ferner wird angenommen, dass das Wasser unter dem Boden des Schiffes einen Auftriebsdruck erzeugt.

$$F_A = F_{g\_Schiff} + F_{g\_Behälter}$$

$$F_{g\_Schiff} = F_A - F_{g\_Behälter}$$

$$= n \cdot V_{Behälter} \cdot \rho_{Wasser} \cdot g - n \cdot m_{Behälter} \cdot g$$

$$= n \cdot g \cdot (V_{Behälter} \cdot \rho_{Wasser} - m_{Behälter})$$

$$= 30 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \left(2\ m^3 \cdot 1030\frac{kg}{m^3} - 150\ kg\right)$$

$$= 562.113\ N$$

$$\approx \underline{\underline{562{,}1\ kN}}$$