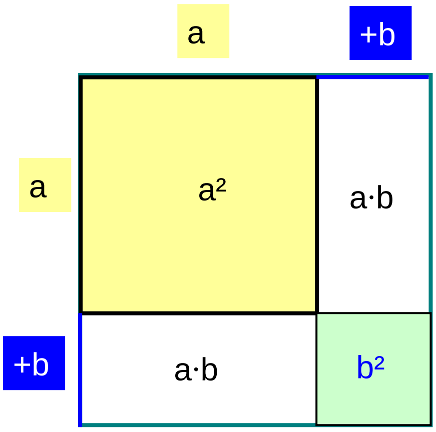
Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Binomische Formeln

Multiplikationen des Terms (a + b) oder (a – b) jeweils mit sich selbst sind binomische Formeln.



1. Binomische Formel

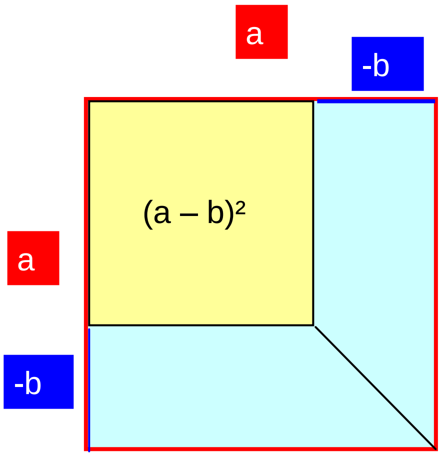
(a + b) · (a + b) = (a + b)²

vgl. Grafik:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Produkt zweier Klammerausdrücke:

$$(a+b)\cdot(a+b)$$
$$= a_{(Kl1)} \cdot a_{(Kl2)} + a_{(Kl1)} \cdot b_{(Kl2)} + b_{(Kl1)} \cdot a_{(Kl2)} + b_{(Kl1)} \cdot b_{(Kl2)}$$
$$a_{(Kl1)} = a_{(Kl2)} = a$$
$$b_{(Kl1)} = b_{(Kl2)} = b$$
$$(a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



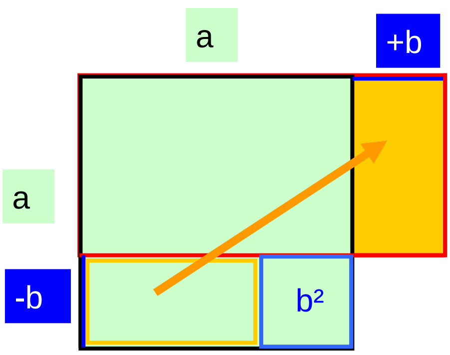
2. Binomische Formel

(a - b) · (a - b) = (a – b)²

vgl. Grafik: Das kleinere Quadrat **(a – b)²** ergibt sich, wenn man vom größeren Quadrat **a²** die beiden Trapezflächen abzieht:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot\frac{a+(a-b)}{2}\cdot b$$
$$= a^2 - \cancel{2}\cdot\frac{a+a-b}{\cancel{2}}\cdot b$$
$$= a^2 - (2a-b)\cdot b$$
$$= a^2 - (2ab - b^2)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Lösung über Produkt zweier Klammern vgl. oben



3. Binomische Formel

(a + b) · (a - b) = a² - b²

Produkt zweier Klammerausdrücke:

$$(a+b)\cdot(a-b)$$
$$= a_{(Kl1)} \cdot a_{(Kl2)} + a_{(Kl1)} \cdot \left(-b_{(Kl2)}\right) + b_{(Kl1)} \cdot a_{(Kl2)} + b_{(Kl1)} \cdot \left(-b_{(Kl2)}\right)$$
$$a_{(Kl1)} = a_{(Kl2)} = a$$
$$b_{(Kl1)} = b_{(Kl2)} = b$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b$$
$$= a^2 - a\cdot b + a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Beispiel/Anwendung 1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Quadratwerte berechnen

$75^2 = (70+5)^2$ $= 70^2 + 2\cdot 70\cdot 5 + 5^2$ $= 4900 + 700 + 25$ $\underline{\underline{= 5625}}$	$1{,}25^2 = (1+0{,}25)^2$ $= 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0{,}25 + 0{,}25^2$ $= 1 + 0{,}5 + 0{,}0625$ $\underline{\underline{= 1{,}5625}}$	$13^2 = (10+3)^2$ $= 10^2 + 2\cdot 10\cdot 3 + 3^2$ $= 100 + 60 + 9$ $\underline{\underline{= 169}}$

Lösen quadratischer Gleichungen der Form $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

$$5\cdot x^2 + 3\cdot x - 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{5}\cdot x - 2 = 0$$

Koeffizienten von x^2 „entfernen“: alle Terme durch 5 teilen

$$x^2 + \frac{3}{5}\cdot x = 2$$

Alle Werte, die die Variable x nicht enthalten, auf die rechte Seite bringen.

x^2	+	$\frac{3}{5}$	$\cdot x$		=	2
a^2	+	$2\cdot b$	$\cdot a$		=	2

$$a^2 = x^2$$

$$a = x$$

$$2\cdot b = \frac{3}{5}$$

$$b = \frac{\frac{3}{5}}{2}$$

$$b = \frac{3}{10}$$

b ermitteln und
b^2 auf beiden Seiten der Gleichung
hinzufügen

a^2	+	$2\cdot b$	$\cdot a$	+	b^2	=	2	+	b^2
x^2	+	$\frac{3}{5}$	$\cdot x$	+	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$	=	2	+	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (x+b)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = 2 + \frac{9}{100} = 2{,}09$$

$$x + 0{,}3 = \sqrt{2{,}09} = \pm 1{,}445683...$$

$$x = -0{,}3 \pm 1{,}445683...$$

$$x_1 = 1{,}145683...$$

$$x_2 = -1{,}745683...$$

Hinweis: Hier nicht weiter behandelt: Herleitung der a-b-c-Formel und p-q-Formel

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Beispiel/Anwendung 2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Quadratwerte berechnen

$$\begin{aligned}69^2 &= (70-1)^2\\ &= 70^2 - 2\cdot 70\cdot 1 + 1^2\\ &= 4900 - 140 + 1\\ &= \underline{\underline{4761}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}97^2 &= (100-3)^2\\ &= 100^2 - 2\cdot 100\cdot 3 + 3^2\\ &= 10000 - 600 + 9\\ &= \underline{\underline{9409}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}34^2 &= (35-1)^2\\ &= 35^2 - 2\cdot 35\cdot 1 + 1^2\\ &= 1225 - 70 + 1\\ &= \underline{\underline{1156}}\end{aligned}$$

Lösen quadratischer Gleichungen der Form $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

$$5\cdot x^2 - 3\cdot x - 10 = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{5}\cdot x - 2 = 0$$

Koeffizienten von x² „entfernen“: alle Terme durch 5 teilen

$$x^2 - \frac{3}{5}\cdot x = 2$$

Alle Werte, die die Variable x nicht enthalten, auf die rechte Seite bringen.

x^2	-	$\frac{3}{5}$	$\cdot x$			=	2			
a²	-	2 · b	· a			=	2			

$a^2 = x^2$

$a = x$

$2\cdot b = \frac{3}{5}$

$b = \frac{\frac{3}{5}}{2}$

$b = \frac{3}{10}$

b ermitteln und
b² auf beiden Seiten der Gleichung
hinzufügen

a²	-	2 · b	· a	+	b²	=	2	+	b²	
x^2	-	$\frac{3}{5}$	$\cdot x$	+	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$	=	2	+	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$	

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (x-b)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = 2 + \frac{9}{100} = 2{,}09$$

x - 0,3 = $\sqrt{2{,}09} = \pm 1{,}445683...$

x = $0{,}3 \pm 1{,}445683...$

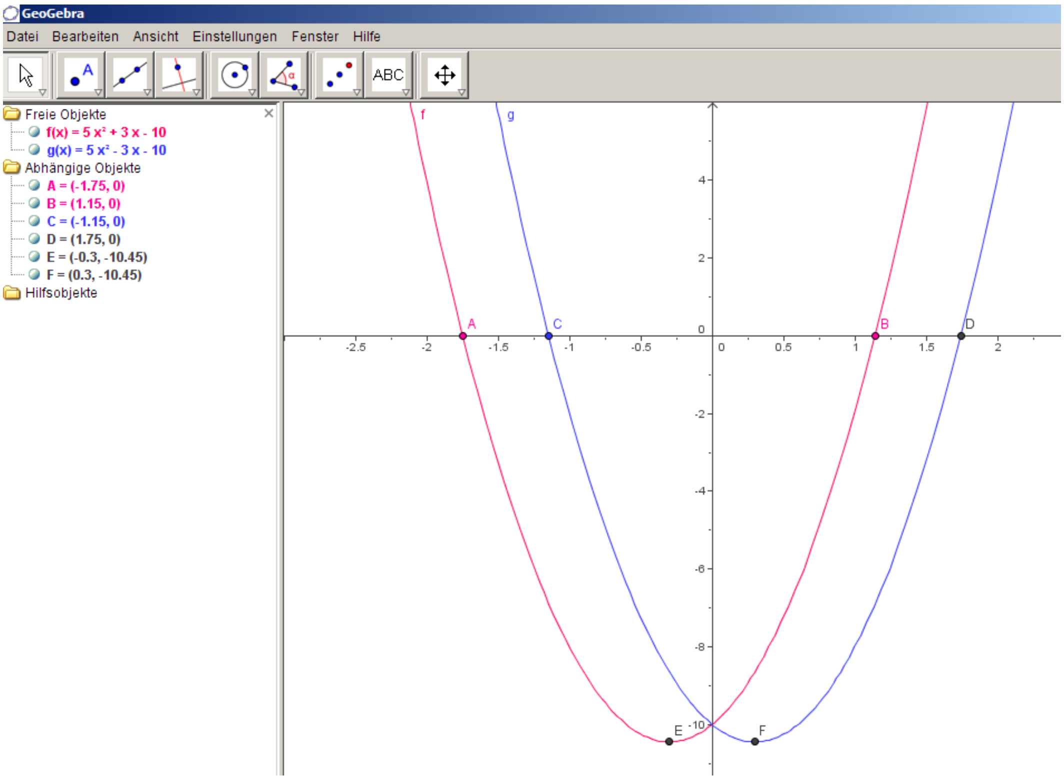
x_1 = 1,745683...

x_2 = -1,145683...

Hinweis: 1. und 2. Binomische Formeln zusammengefasst: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ u.rath@t-online.de

Grafische Darstellung für die quadratischen Gleichungen. In den Schnittpunkten mit der Abszisse gilt f(x) = y = 0.



Frage:

Sind 1. und 2. Binomische Formel Spiegelbilder um die Ordinate (senkrechte Achse)?

Beispiel/Anwendung 3. Binomische Formel: (a - b)² = (a + b) · (a – b)

Produkt zweier Faktoren

$75 \cdot 65$	$106 \cdot 94$	$1{,}01 \cdot 0{,}99$
$= (70+5) \cdot (70-5)$	$= (100+6) \cdot (100-6)$	$= (1+0{,}01) \cdot (1-0{,}01)$
$= 70^2 - 5^2$	$= 100^2 - 6^2$	$= 1^2 - 0{,}01^2$
$= 4900 - 25$	$= 10000 - 36$	$= 1 - 0{,}0001$
$\underline{\underline{= 4875}}$	$\underline{\underline{= 9964}}$	$\underline{\underline{= 0{,}9999}}$