Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Fertigungstechnik
Technische Kommunikation - Technisches Zeichnen

11 Projektionszeichnen
11.2 Körperschnitte und Abwicklungen
11.2.4 Kegelige Körper

11.2.4.3 Verfahren zur Abwicklung schwach kegliger Körper

Vielfach müssen schwach konische Kegelstümpfe abgewickelt werden, die nicht ohne weiteres zum vollen Kegel erweitert werden können, weil die Kegelspitze entweder nicht mehr auf das Zeichenblatt oder die Blechtafel passt oder aber so weit entfernt ist, dass man sie nicht mehr verwenden kann.

In diesen Fällen ist die zeichnerische Abwicklung mit dem sonst üblichen Mantellinienverfahren nicht möglich. Das Dreiecksverfahren sollte wegen möglicher Ungenauigkeiten nur dann angewendet werden, wenn keine andere Methode zum Ziel führt.

Als Voraussetzung für die Durchführung der Abwicklung solcher Körper werden die Zusammenhänge zwischen dem Kegel und dessen Abwicklung betrachtet.

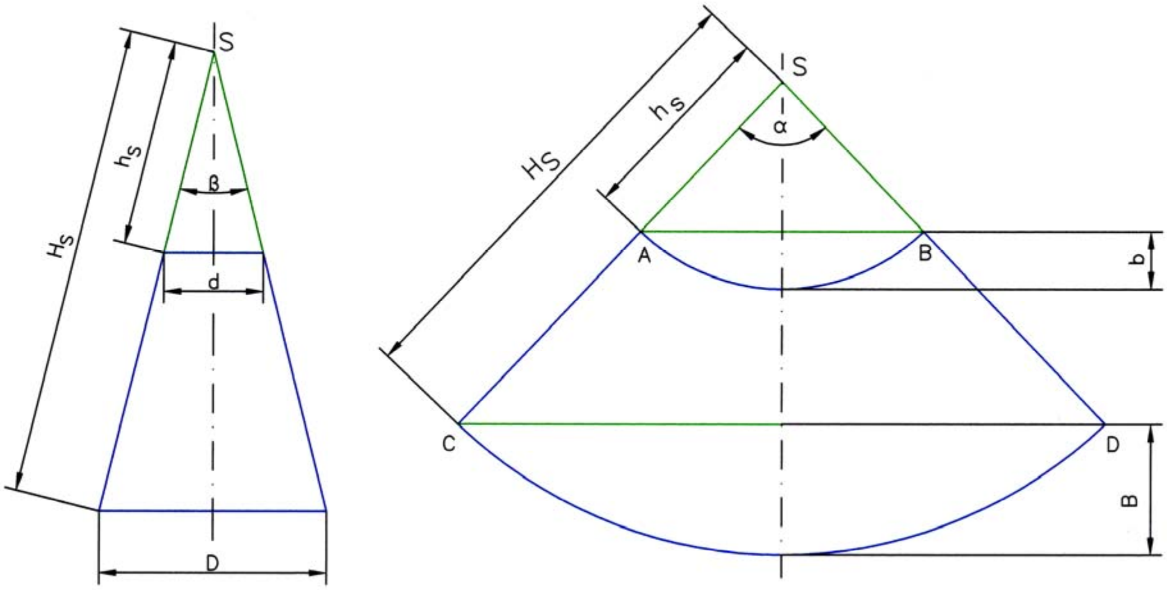


Bild 1 und 2: Zusammenhang zwischen Kegeln und deren Abwicklungen

Der in Bild 1 dargestellten Kegel mit der gemeinsamen Spitze in S und den Grundkreisdurchmessern d und D sind einander ähnlich. Deshalb sind auch deren Abwicklungen ähnlich, wie in Bild 2 zu sehen ist.

Es gilt im Bild 1 $$\frac{h_S}{H_S} = \frac{d}{D}$$

und in der Abwicklung im Bild 2 $$\frac{h_S}{H_S} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{CD}}}.$$

Aus beiden Verhältnisgleichungen folgt $$\frac{d}{D} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{CD}}}.$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Die Durchmesser der Grundkreise verhalten sich wie die Sehnen der abgewickelten Umfänge der Grundkreise im Kreisausschnitt mit dem Radius h_S bzw. H_S mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{R}{H_S} \cdot 360° = \frac{r}{h_S} \cdot 360° = 360° \cdot \sin\frac{\beta}{2}$.

Sind H_S, D, h_S und d bekannt, lässt sich der Mittelpunktswinkel α berechnen und ebenfalls die Längen der Sehnen AB und CD, die Höhen der ΔSAB und ΔSCD, der Abstand der Sehnen und anschließend die Breiten b und B der Kreisbögen.

Mit diesen Werten konstruieren wir das Trapez ABDC. Die letzte Aufgabe besteht in der Konstruktion der Kreisbögen. Dazu wählen wir das Verfahren „Zeichnen flacher Kreisbögen“ (vgl. Anlage – Geometrische Grundkonstruktionen – Zeichnen flacher Kreisbögen; Anm.: es werden 3 Methoden dargestellt.).

Aufgabe:

1. Berechnen Sie die für die Abwicklung des Kegelstumpfes erforderlichen Werte (s. Bild 3).

2. Konstruieren Sie die Abwicklung der Mantelfläche des Kegelstumpfes.

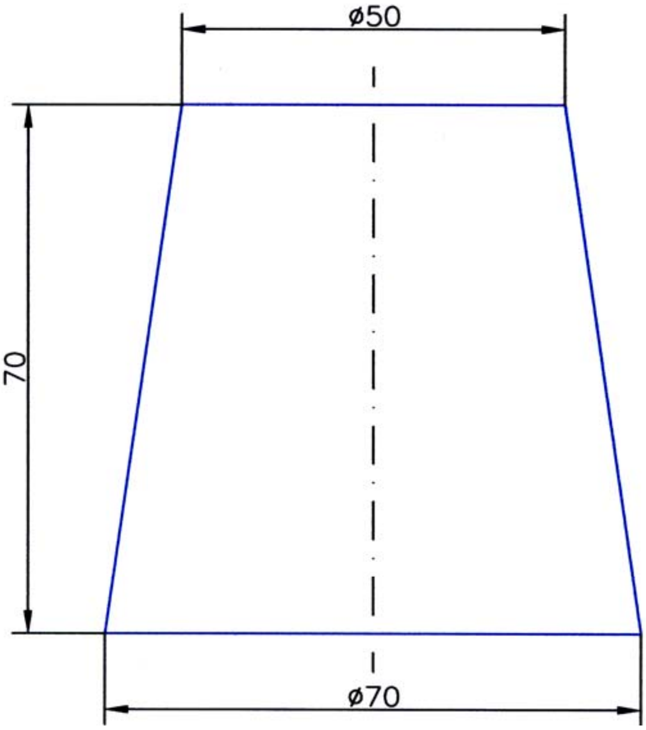


Bild 3: Kegelstumpf (Vorderansicht)

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Anlage
Geometrische Grundkonstruktionen
Zeichnen flacher Kreisbögen

Methode 1
Die Beschreibung der Schritte erfolgt anhand der Zeichnung Seite 4.

Schritt 1:

1.1 Sehne $\overline{AB}$ (Länge *l*) zeichnen
1.2 Sehne halbieren. Mittelpunkt *M* markieren.
1.3 Mittellinie der Sehne durch den Mittelpunkt *M* zeichnen.
1.4 Von *M* die Breite *b* des Kreisbogens abtragen. Punkt *C* markieren.

Schritt 2:

2.1 Punkte *A* und *C* sowie *B* und *C* verbinden.
2.2 Parallele zur Sehne $\overline{AB}$ durch Punkt *C* zeichnen. In den Punkten *A* und *B* jeweils eine Senkrechte zu $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ zeichnen. Die Schnittpunkte *D* und *E* markieren (evtl. müssen die Senkrechten zu $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ und die Parallele zur Sehne $\overline{AB}$ verlängert werden).

Schritt 3:

3.1 Die Strecken $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{CD}\ und\ \overline{CE}$ in gleiche Teile (z.B. $n = 5$) einteilen.
3.2 Die Schnittpunkte der Sehne mit den Schnittpunkten der Hypothenusen verbinden.

Schritt 4:

4.1 Von den Punkten A und B eine Lotrechte auf die Strecke $\overline{CD}$ bzw. $\overline{CE}$ fällen. Den jeweiligen Schnittpunkt markieren wir mit *F* und *G*.
4.2 Die Geraden $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ ebenfalls in n Teile einteilen (entspr. Einteilung in Schritt 3).

Schritt 5:

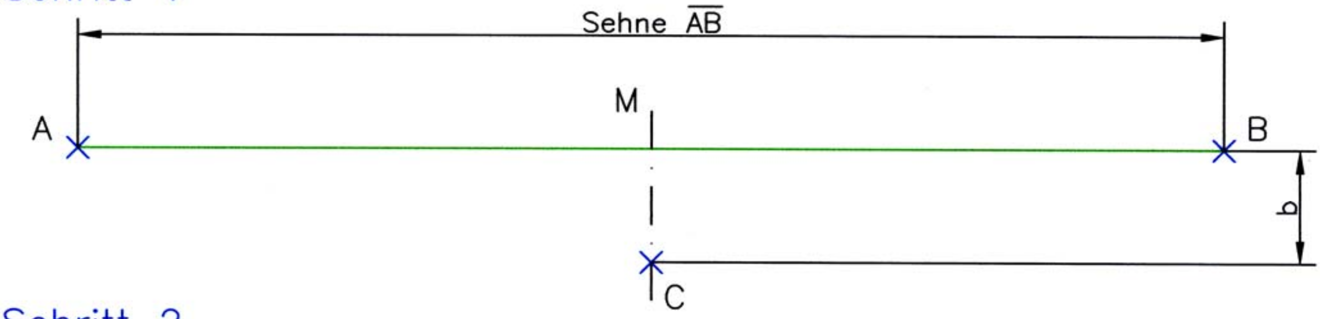
5.1 Die in 4.2 ermittelten Schnittpunkte der Geraden $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ mit dem Punkt *C* verbinden.
5.2 Die Schnittpunkte der von den Teilungspunkten der Geraden $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ ausgehenden Geraden zum Punkt *C* mit den entsprechenden Geraden zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und den Hypothenusen $\overline{CD}$ bzw. $\overline{CE}$ ausstraken. Der Strak ist der Bogen für den Kreisabschnitt mit der Sehne $\overline{AB}$, der Breite des Bogens *b* und dem unbekannten Radius *r*.

Anmerkung:

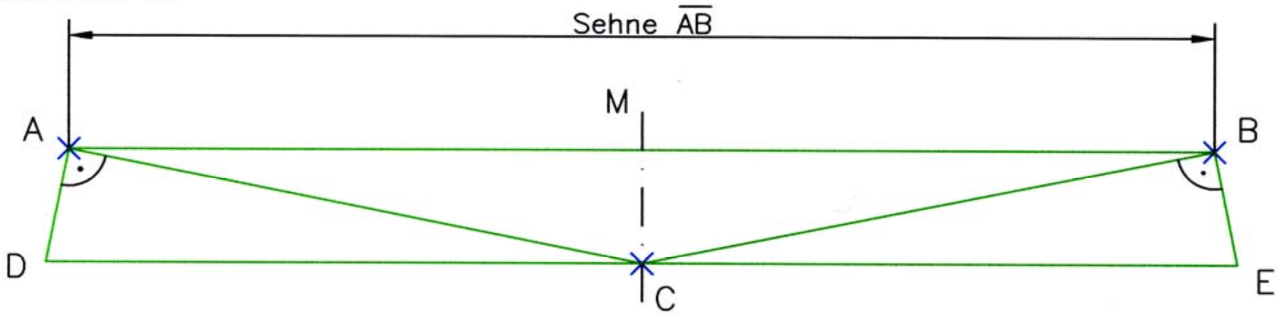
Diese Beschreibung enthält nicht die Beweisführung für die Richtigkeit des Konstruktionsverfahrens.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

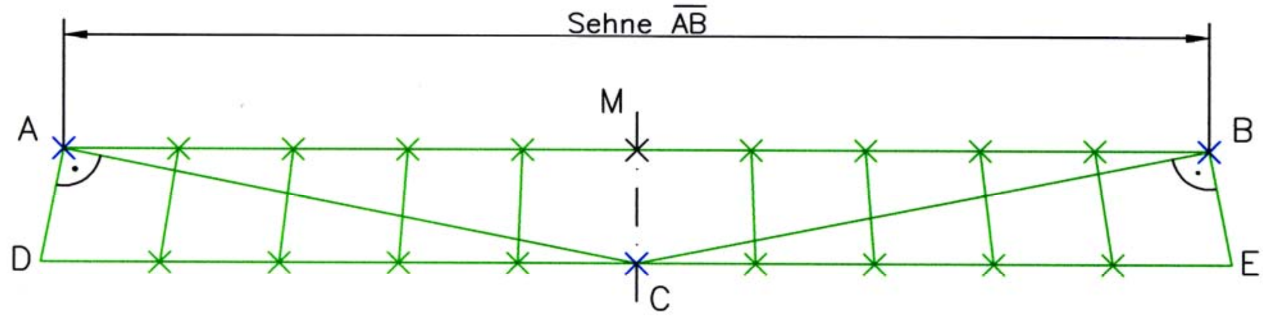
Schritt 1



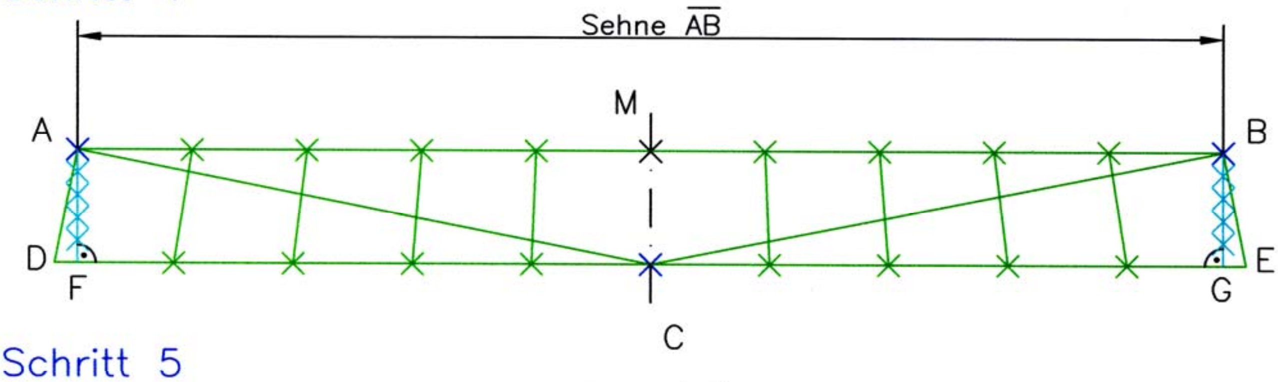
Schritt 2



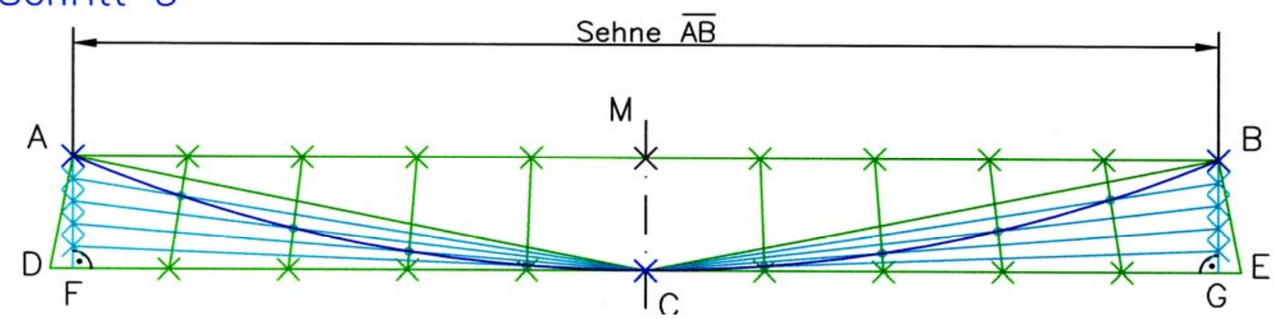
Schritt 3



Schritt 4

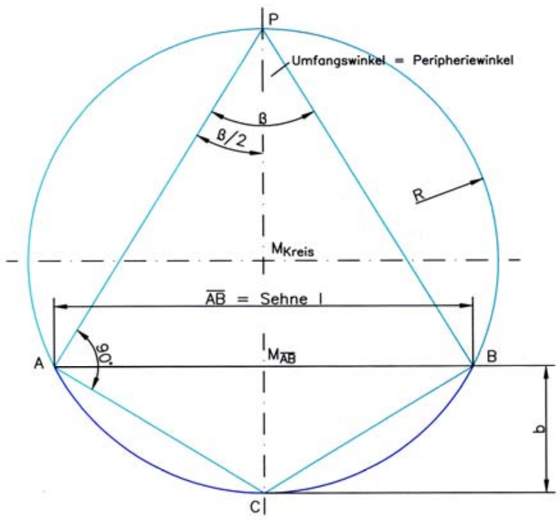


Schritt 5



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Nachweis für die Richtigkeit der Methode 1

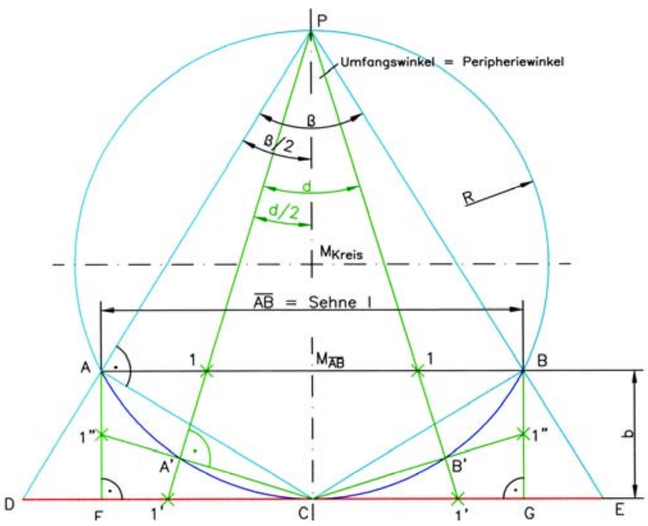


Kreisbogen und Kreis

Jedem Kreisbogen mit der Länge *l* (= Sehne $\overline{AB}$) und der Breite *b* (= $\overline{M_{\overline{AB}}C}$) ist ein Kreis mit dem Radius *R* zuzuordnen. Zum Kreisbogen gehört der Peripheriewinkel *β*.

Satz des Thales

Verbinden wir die Punkte *A* und *P* sowie *A* und *C*, erhalten wir das rechtwinklige Dreieck ΔCAP mit dem rechten Winkel beim Punkt *A*, den Katheten $\overline{AP}$ und $\overline{AC}$ und der Hyapothenuse $\overline{CP}$ (Kreisdurchmesser *D* = 2 *R*).



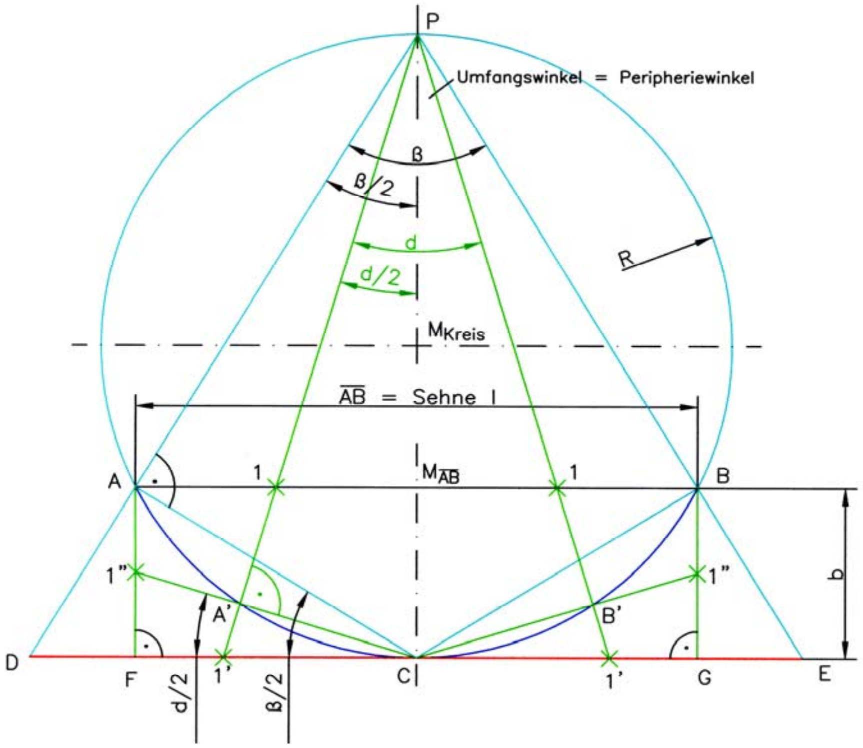
Parallele zur Sehne durch Punkt *C* zeichnen. Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ bis zu dieser Tangente verlängern. Schnittpunkte *D* und *E* markieren.

Strecken $\overline{AM_{\overline{AB}}}$ und $\overline{DC}$ halbieren. Punkte 1 und 1‘ verbinden und bis zum Peripheriepunkt P verlängern. Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreisbogen ergibt den Punkt *A*‘. Verbinden wir diesen Punkt mit C, erhalten wir ein weiteres rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei *A*‘ (Satz des Thales).

Vom Punkt *A* Lotrechte auf die Tangente $\overline{DC}$ zeichnen. Den Fußpunkt des Lotes kennzeichnen wir mit *F*. Die Kathete $\overline{A'C}$ auf das Lot $\overline{AF}$ verlängern und den Schnittpunkt mit 1“ kennzeichnen.

Wenn wir jetzt nachweisen können, dass die Verhältnisse $\frac{\overline{1''F}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{1M_{\overline{AB}}}}{\overline{AM_{\overline{AB}}}} = \frac{\overline{1'C}}{\overline{DC}}$ gleich sind (im vorliegenden Fall ½), haben wir den Nachweis für die Richtigkeit der Konstruktion des Kreisbogens nach Methode 1.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de



Es ist

1. ∠ FC1" = ∠ CPA' = δ/2, weil $\overline{C1''} \perp \overline{P1'}$ und $\overline{DC} \perp \overline{PC}$ und

2. ∠ FCA = ∠ CPD = β/2, weil $\overline{CA} \perp \overline{PD}$ und $\overline{DC} \perp \overline{PC}$

Für die Winkel β/2 und δ/2 gelten die Tangensfunktionen

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AM_{\overline{AB}}}}{\overline{PM_{\overline{AB}}}} \quad \text{und} \quad \tan\frac{\delta}{2} = \frac{\overline{1''F}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{1'C}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{1M_{\overline{AB}}}}{\overline{PM_{\overline{AB}}}}$$

Mit diesen Winkelfunktionen bilden wir die Verhältnisgleichungen

1)

$$\frac{\tan\delta/2}{\tan\beta/2} = \frac{\dfrac{\overline{1''F}}{\overline{FC}}}{\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}} = \frac{\dfrac{\overline{1M_{\overline{AB}}}}{\overline{PM_{\overline{AB}}}}}{\dfrac{\overline{AM_{\overline{AB}}}}{\overline{PM_{\overline{AB}}}}}$$

$$\frac{\overline{1''F}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{1M_{\overline{AB}}}}{\overline{PM_{\overline{AB}}}} \cdot \frac{\overline{PM_{\overline{AB}}}}{\overline{AM_{\overline{AB}}}}$$

$$\frac{\overline{1''F}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{1M_{\overline{AB}}}}{\overline{AM_{\overline{AB}}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AM_{\overline{AB}}}}{\overline{AM_{\overline{AB}}}} = \frac{1}{2}$$

2)

$$\frac{\tan\delta/2}{\tan\beta/2} = \frac{\dfrac{\overline{1''F}}{\overline{FC}}}{\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}} = \frac{\dfrac{\overline{1'C}}{\overline{PC}}}{\dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}}$$

$$\frac{\overline{1''F}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{1'C}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{\overline{1''F}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{1'C}}{\overline{DC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{DC}}{\overline{DC}} = \frac{1}{2}$$

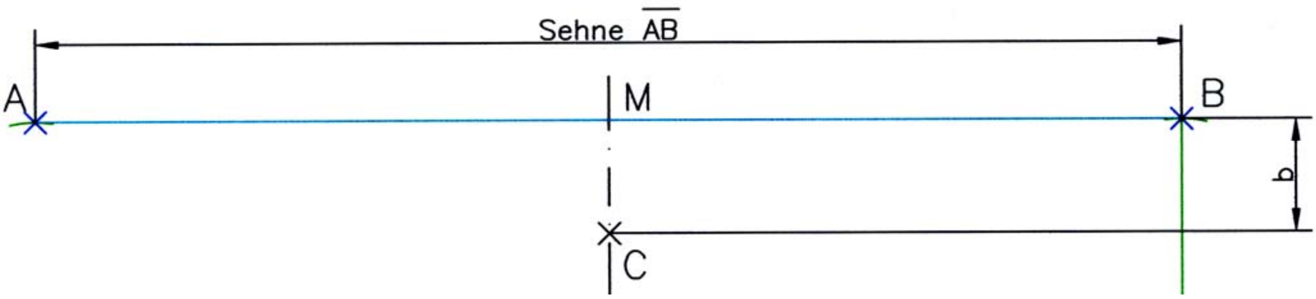
Das Lot wird im selben Verhältnis geteilt wie die halbe Sehne und halbe zugehörige Tangente.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Methode 2
Die Beschreibung der Schritte erfolgt anhand der Zeichnungen.

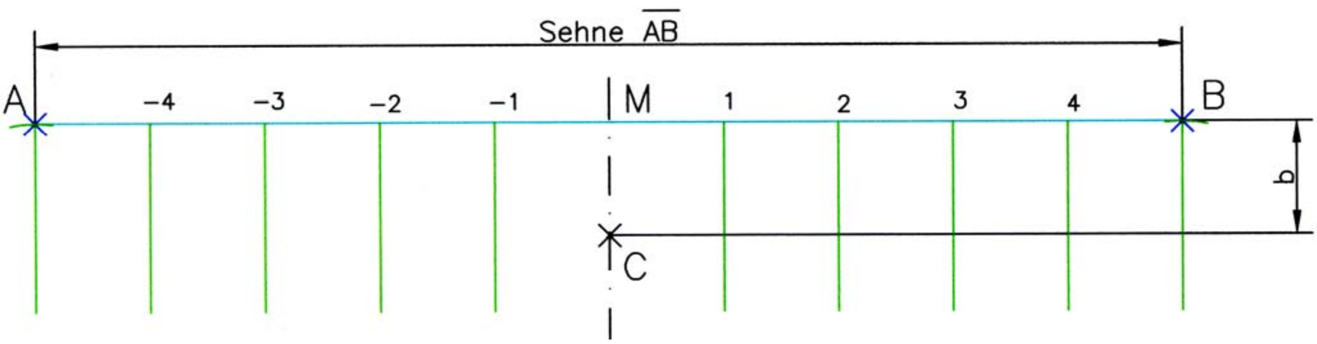
Schritt 1:

1.1 Sehne $\overline{AB}$ (Länge *l*) zeichnen. Punkte *A* und *B* markieren.
1.2 Sehne halbieren. Mittelpunkt *M* markieren.
1.3 Mittellinie der Sehne durch den Mittelpunkt *M* zeichnen.
1.4 Von *M* die Breite *b* des Kreisbogens abtragen. Punkt *C* markieren.



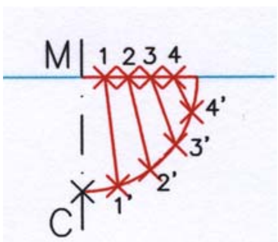
Schritt 2:

2.1 Auf der Sehne $\overline{AB}$ die Strecken $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ in *n* gleiche Teile teilen (im Beispiel *n* = 5).
2.2 Die Teilungspunkte mit 1, 2, ... bzw. -1, -2, ... markieren.
2.3 Von den Teilungspunkten Senkrechte abtragen.



Schritt 3:

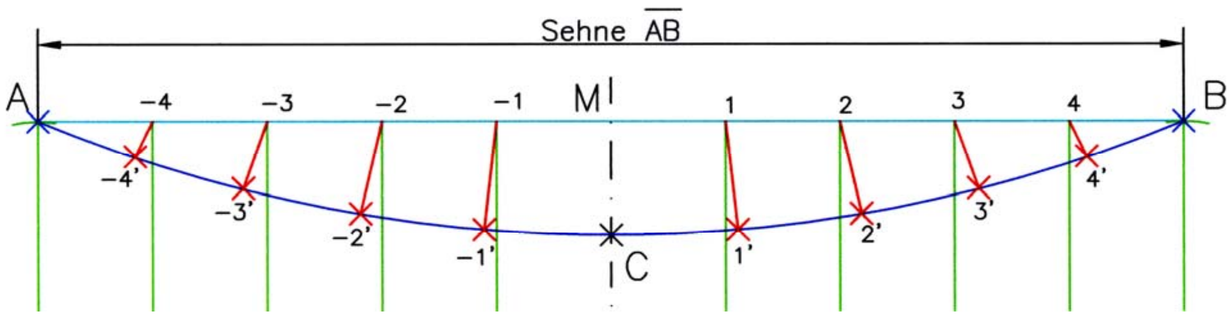
3.1 Mit dem Radius *r* = *b* = $\overline{MC}$ einen Viertelkreis um *M* zeichnen.
3.2 Den Kreisbogen und die waagerechte Gerade in *n* gleiche Teile einteilen.
3.3 Teilungspunkte mit 1 1‘, 2 2‘, ... markieren und die Punkte verbinden.



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Schritt 4

4.1 Die Strecken $\overline{1\ 1'}$, $\overline{2\ 2'}$, ... von den Punkten 1, 2, 3, ... der Sehne $\overline{AB}$ unter dem gleichen Winkel wie im Viertelkreis abtragen.
4.2 Die Punkte *A*, -4‘, -3‘, ..., *C*, ... 3‘, 4‘, *B* ausstraken. Der Kurvenbogen ist der gesuchte Kreisbogen.



Anmerkung:

Schritt 4‘:

In der Literatur[1] wird zu Schritt 4 auch dargestellt, dass die dem Viertelkreis entnommenen Strecken $\overline{1\ 1'}$, $\overline{2\ 2'}$ senkrecht von den Teilungspunkten 1, 2, ... der Sehne $\overline{AB}$ abgesetzt werden.

Wichtig:

Ohne Beweis: diese Konstruktion ist ungenau. Der Strak nach Schritt 4 ist zu stark gekrümmt, der Strak nach 4‘ zu schwach. Bei nur sehr schwach gekrümmten Kreisabschnitten kann der Fehler evtl. vernachlässigt werden.

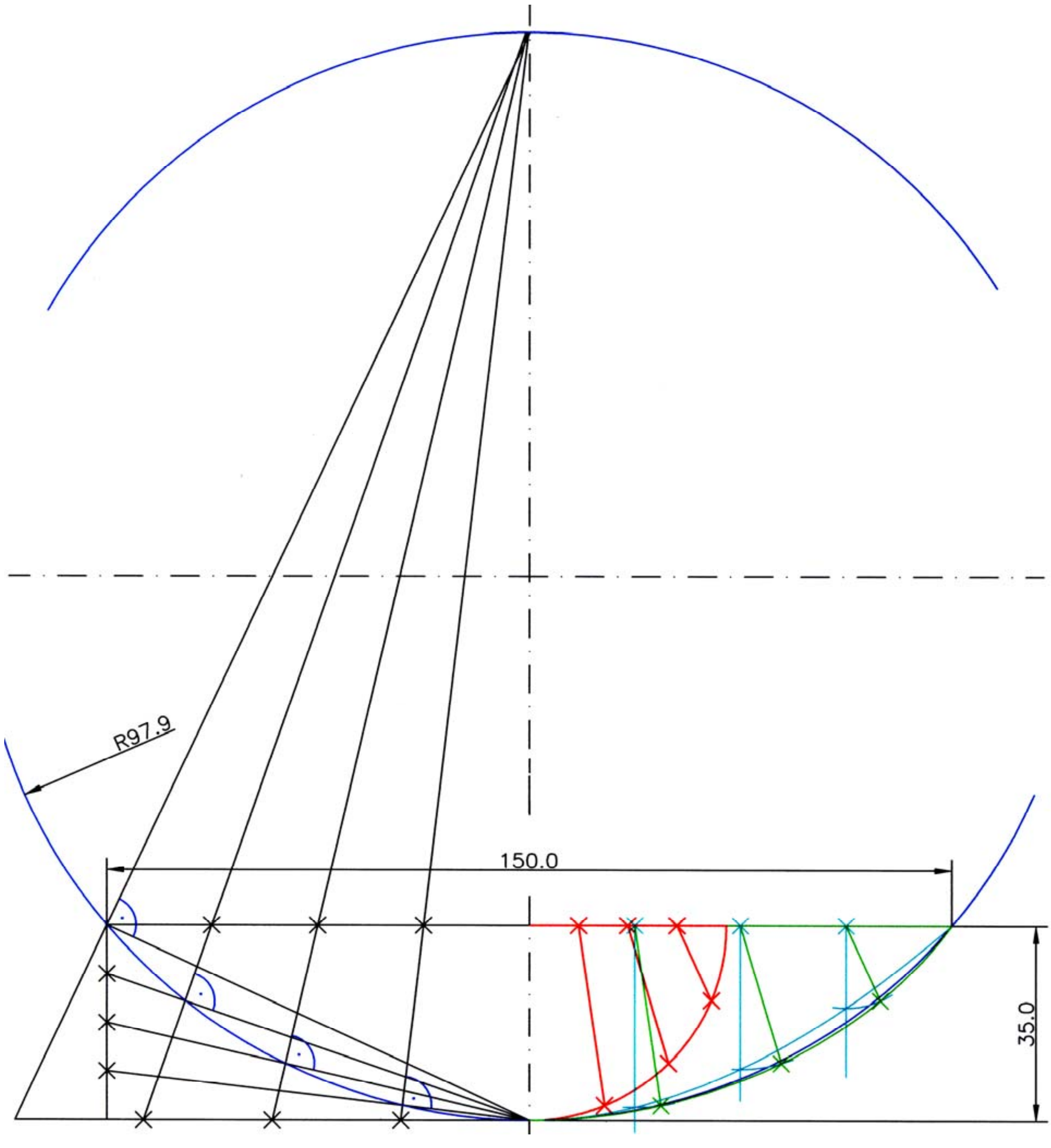
Auf der folgenden Seite sind die Methoden 1 und 2 gegenübergestellt.

[1] Z.B.: Böge, Alfred: Abwicklung von Blechkörpern / Alfred Böge; Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg Verlag & Sohn; 1992, ISBN 3-528-05124-8; S. 9

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Bild:

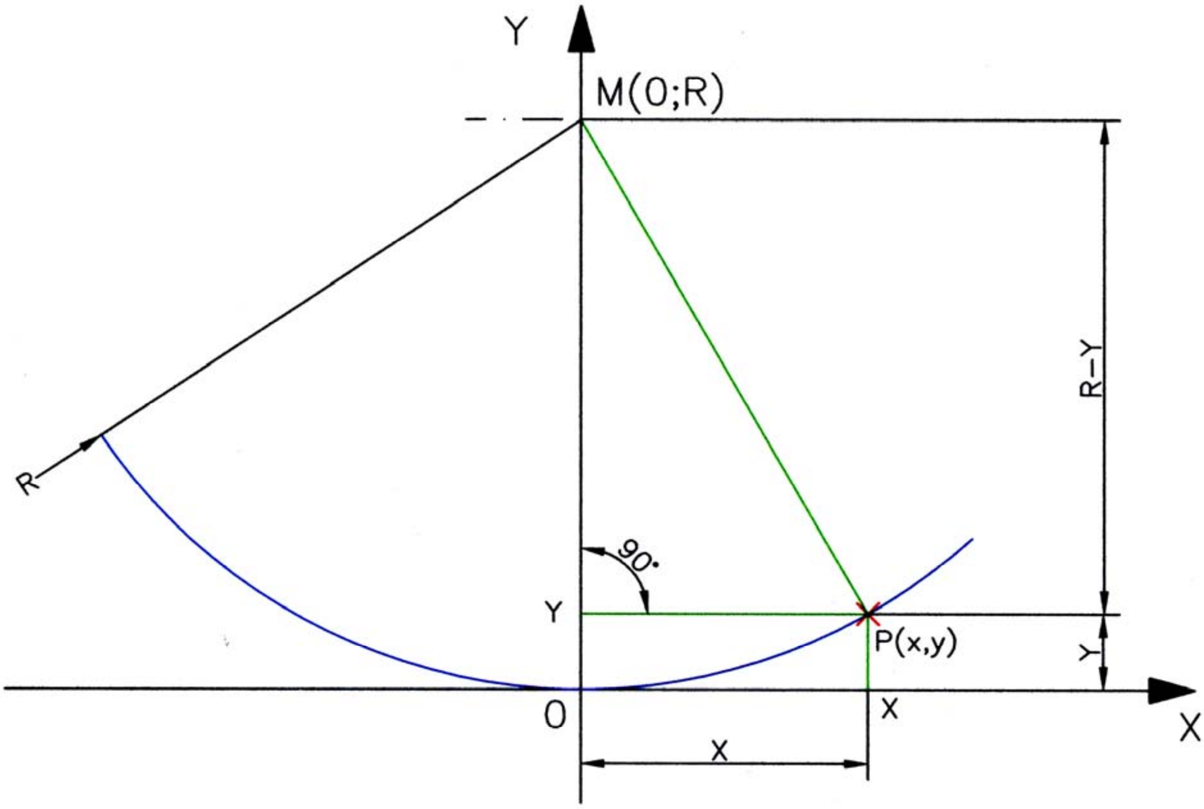
Vergleich der Konstruktion eines schwach gekrümmten Kreisbogens nach Methode 1 (linke Hälfte) und Methode 2 (rechte Hälfte mit Schritt 4 und Schritt 4‘). Bei der Konstruktion nach Methode 1 liegen die Strakpunkte genau auf dem Kreisbogen.



$$R = \frac{b}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot b} = \frac{35\,mm}{2} + \frac{150^2\ mm^2}{8 \cdot 35\,mm} = 97{,}8571...\ mm$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Methode 3
Für eine rein **rechnerische Methode** zur Konstruktion flacher Kreisbögen wird zunächst der tiefste Punkt in den Ursprung eines Koordinatenkreuzes gelegt (vgl. Abb.):



Für das rechtwinklige Dreieck ΔMYP gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $R^2 = x^2 + (R-y)^2$. Der Ausdruck $(R-y)^2$ ergibt als 2. Binomische Formel $R^2 - 2\,R\,y + y^2$.

Die Funktionsgleichung für den Kreisbogen ist dann

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + (R-y)^2 \\ &= x^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot y + y^2 \\ y^2 - 2\cdot R\cdot y + R^2 &= R^2 - x^2 \\ (y-R)^2 &= R^2 - x^2 \\ y - R &= \pm\sqrt{R^2 - x^2} \\ y &= R \pm \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

Für den unterhalb des Kreismittelpunktes liegenden Kreisbogen ist der negative Wurzelausdruck einzusetzen. Für die frei zu wählenden x-Werte des Kreisbogens werden die zugehörigen y-Werte, d.h. die Bogenhöhen zu berechnet:

$$y = f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}\ .$$

Es ist sinnvoll, sowohl den Radius R wie auch die y-Werte mit Hilfe eines Excelprogramms zu bestimmen.

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Beispiel:

Ein Kreisbogen hat eine Länge von *l* = 150 mm und eine Breite *b* = 15 mm. Gesucht ist der zugehörige Kreisbogen.

Für das angegebene Beispiel erhält man den Radiuswert und die *y*-Werte:

Zeichnen flacher Kreisbögen (Mathematische Lösung)

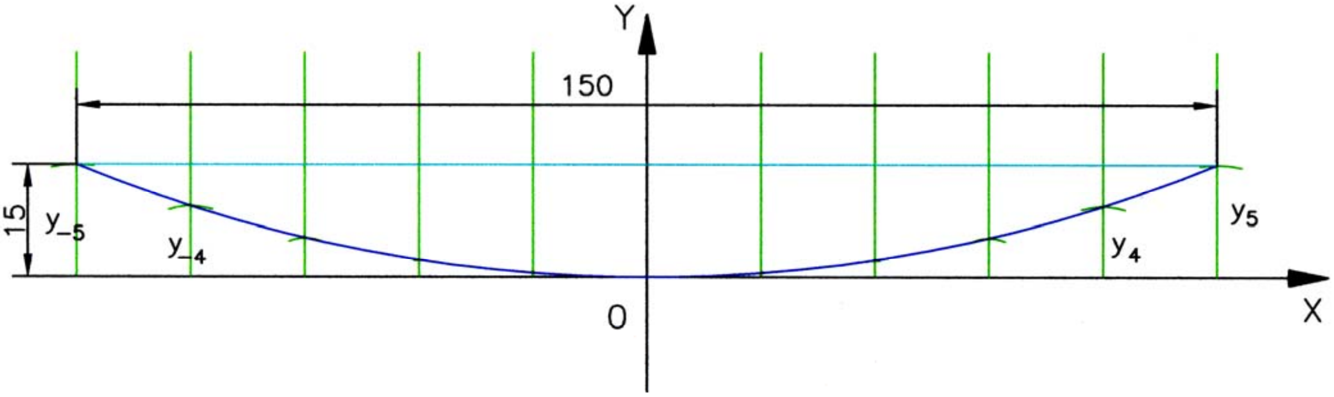
Länge der Sehne l	150	mm
Breite des Kreisbogens b	15	mm
Radius r	195	mm
Teilung der Sehne n	10	
x-Abstand	15	mm

$$R = \frac{b}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot b}$$

Formel vgl.
Tabellenbuch Metall
- Flächen
- Kreisabschnitt

Punkt	x	y
	mm	mm
-5	-75,00	15,00
-4	-60,00	9,46
-3	-45,00	5,26
-2	-30,00	2,32
-1	-15,00	0,58
0	0,00	0,00
1	15,00	0,58
2	30,00	2,32
3	45,00	5,26
4	60,00	9,46
5	75,00	15,00

Bild: Rechnerische Methode zur Konstruktion flacher Kreisbögen



Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

Löser:

1. Berechnung der für die Abwicklung erforderlichen Maße

1.1 Berechnung *β*/2 (vgl. Bild 1 und Bild 4)

$$\frac{\beta}{2} = \arctan\frac{R-r}{h'} = \arctan\frac{35mm - 25mm}{70mm}$$
$$= \arctan\frac{1}{7} = 8{,}130102...°$$
$$\approx 8{,}1301°$$

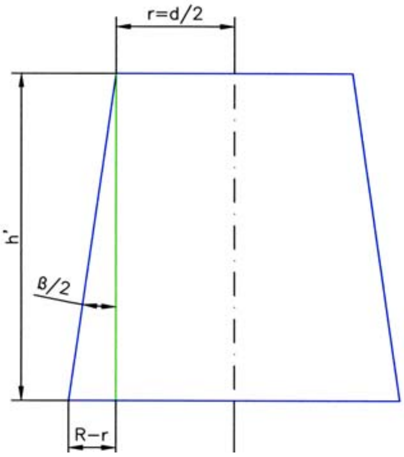


Bild 4

1.2 Berechnung Mittelpunktswinkel *α* (Abwicklung, vgl. Bild 2) und α/2

$$\alpha = 360° \cdot \sin\frac{\beta}{2} = 360° \cdot \sin\left(\arctan\frac{\beta}{2}\right)$$
$$= 360° \cdot \sin\left(\arctan\frac{1}{7}\right)$$
$$= 50{,}911680...°$$
$$\approx 50{,}9117°$$
$$\frac{\alpha}{2} = 25{,}455844...°$$
$$\approx 25{,}4558°$$

1.3 Berechnung H_S (vgl. Bild 1)

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{R}{H_S}$$
$$H_S = \frac{R}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{R}{\sin\left(\arctan\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$= \frac{35\,mm}{\sin\left(\arctan\frac{1}{7}\right)}$$
$$= 247{,}487373...\,mm$$
$$\approx 247{,}4874\,mm$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☎ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

1.4 Berechnung h_S (vgl. Bild 1)

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{h_S}$$

$$\begin{aligned} h_S &= \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\sin\left(\arctan\frac{\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{25\,mm}{\sin\left(\arctan\frac{1}{7}\right)} \\ &= 176{,}776695...\,mm \\ &\approx 176{,}7767\,mm \end{aligned}$$

1.5.1 Berechnung der Länge der Sehne AB für das Dreieck ΔASB (vgl. Bild 2):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{h_S} = \frac{\overline{AB}}{2\cdot h_S}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2\cdot h_S \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \\ &\approx 2\cdot 176{,}7767\,mm \cdot \sin 25{,}4558° \\ &\approx 151{,}9624\,mm \end{aligned}$$

1.5.2 Berechnung der Länge der Sehne CD für das Dreieck ΔCSD (vgl. Bild 2):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{H_S} = \frac{\overline{CD}}{2\cdot H_S}$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= 2\cdot H_S \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \\ &\approx 2\cdot 247{,}4847\,mm \cdot \sin 25{,}4558° \\ &\approx 212{,}7451\,mm \end{aligned}$$

1.6 Höhe Trapez ABDC (vgl. Bild 2):

$$\begin{aligned} h_{Trapez\_ABCD} &= H_{CD\_\Delta CSD} - h_{AB\_\Delta ASB} \\ &= H_S \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - h_S \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \\ &= \left(H_S - h_S\right)\cdot \cos\frac{\alpha}{2} \\ &\approx \left(247{,}4874\,mm - 176{,}7767\,mm\right)\cdot \cos 25{,}4558° \\ &\approx 63{,}8459\,mm \end{aligned}$$

Uwe Rath
Eckleinjarten 13a . 27580 Bremerhaven
☏ 0471 34126 ✉ rath-u@t-online.de

1.7 Breite des Bogens *b* mit Radius h_S, Mittelpunktswinkel α für das Dreieck ΔASB mit der Sehne AB (vgl. Bild 2)

$$\begin{aligned} b &= h_S - h_{AB\_\Delta ASB} \\ &= h_S - h_S \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = h_S \cdot \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\approx 176{,}7767\ mm \cdot (1 - \cos 25{,}4558°) \\ &\approx 17{,}1620\ mm \end{aligned}$$

1.8 Breite des Bogens *B* mit Radius H_S, Mittelpunktswinkel α für das Dreieck ΔCSD mit der Sehne CD (vgl. Bild 2)

$$\begin{aligned} B &= H_S - H_{CD\_\Delta CSD} \\ &= H_S - H_S \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = H_S \cdot \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\approx 247{,}4874\ mm \cdot (1 - \cos 25{,}4558°) \\ &\approx 24{,}0268\ mm \end{aligned}$$

2. Konstruktion der Abwicklung

Anlage: Zeichnung