**Geneigte (Schiefe) Ebene, Reibungskraft**

**Übungen**

**1** Auf die Bremsscheibe einer Scheibenbremse wirken die beiden Reibkräfte von jeweils $F_R$ = 6,4 kN. Als Reibungszahl Bremsbelag-Stahl wurde $\mu$ = 0,40 ermittelt. Wie groß ist die Kraft $F$, mit der das Hydrauliksystem jeweils einen Bremsbelag gegen die Scheibe presst?

http://de.wikipedia.org/wiki/Scheibenbremse

Shimano XT Disc (hydraul.)

Lösung:

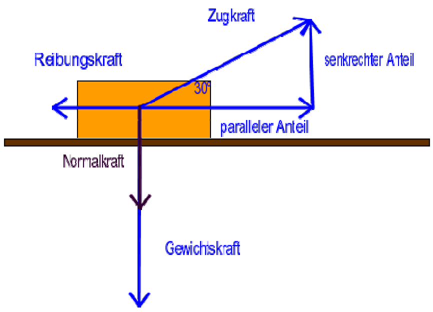
$$F = F_N$$

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$$F_N = \frac{F_R}{\mu} = \frac{6{,}4\ kN}{0{,}4} = \underline{\underline{16\ kN}}$$

**2** Berechnen Sie die Zugkraft für die Haft- und Gleitreibung, wenn folgende Daten gegeben sind:

Masse *m* des Körpers: 220 kg
Werkstoffpaarung: Holz/Stahl
Reibungszustand: trocken




Lösungen

Berechnung der Gewichtskraft (*g* y 10 m/s²):
*Hinweis:* Die Berechnung der Gewichtskraft ist nicht gefragt und wäre auch für die Berechnung der Reibungs- und Zugkräfte nicht erforderlich.

$$F_g = m \cdot g \approx 220\ kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \approx 2200\ N$$
$$\underline{\underline{\approx 2{,}2\ kN}}$$

Berechnung der Normalkraft:
*Hinweis:* Die Auflagefläche verläuft waagerecht, d. h. der Winkel zwischen der Normalkraft und der Auflagefläche beträgt 90°.

$$F_N = F_g \cdot \cos\alpha = F_g \cdot \cos 90° = F_g \cdot 1 = F_g$$
$$\underline{\underline{= 2{,}2\ kN}}$$

Berechnung der Reibungskräfte:

| Werkstoffpaarung | Reibungszustand | Haftreibungsfaktor $\mu_0$ | Gleitreibungsfaktor $\mu$ |
|---|---|---|---|
| Holz/Stahl | trocken | 0,55 | 0,35 |
| Reibungskräfte | | $F_{R_0} = \mu_0 \cdot F_N = 0{,}55 \cdot 2{,}2\ kN = \underline{\underline{1{,}21\ kN}}$ | $F_R = \mu \cdot F_N = 0{,}35 \cdot 2{,}2\ kN = \underline{\underline{0{,}77\ kN}}$ |

Berechnung der Zugkräfte
Hinweis: Um den Körper in Bewegung zu bringen (Überwindung der Haftreibung) bzw. danach in Bewegung zu halten, wäre als Zugkraft die in der Skizze dargestellte Kraft „paralleler Anteil“ *F’* ausreichend. Da die tatsächliche Zugkraft aber unter dem Winkel $\rho$ = 30° schräg nach oben angreift, müssen wir diese berechnen:

| Es gilt: | Zugkraft | |
|---|---|---|
| | bei Haftreibung | bei Gleitreibung |
| $\cos\rho = \frac{AK}{HY} = \frac{F'}{F_{Zugkraft}}$ <br> $F_{Zugkraft} = \frac{F'}{\cos\rho} = \frac{-F_R}{\cos\rho}$ | $F_{Z0} = \frac{-F_{R0}}{\cos 30°} = \frac{-1{,}21 kN}{\cos 30°} \underline{\underline{\approx -1{,}39\ kN}}$ | $F_Z = \frac{-F_R}{\cos 30°} = \frac{-0{,}77 kN}{\cos 30°} \underline{\underline{\approx -0{,}89\ kN}}$ |

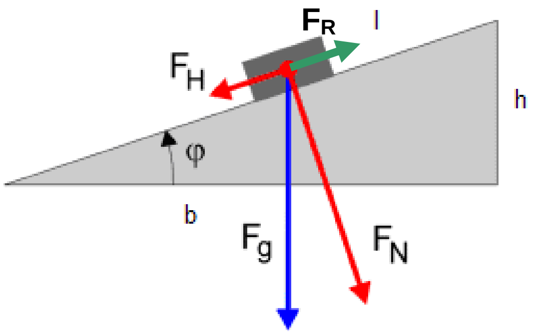
**3.1** Um wie viel Grad muss eine Paketrutsche gegen die Horizontale geneigt sein, wenn Pakete mit einer Haftreibungszahl $\mu_0 = 0{,}6$ darauf abgleiten sollen?

**3.2** Mit welcher Geschwindigkeit *v* erreichen die Pakete das Ende der Rutsche, wenn diese 15 m lang ist und die Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}4$ beträgt?

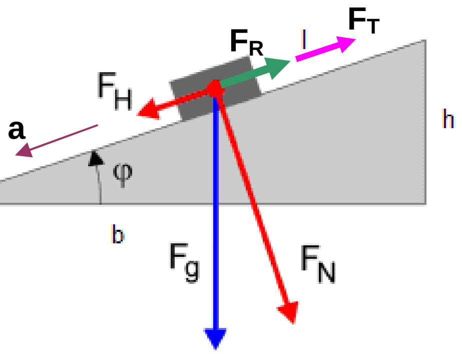
Lösungen

**3.1** Der Körper beginnt zu rutschen, wenn die Haftreibungskraft überwunden wird, d. h.

$$F_H \geq F_{Ro}$$
$$F_H \geq \mu_0 \cdot F_N$$
$$F_g \cdot \sin\alpha = \mu_0 \cdot F_g \cdot \cos\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mu_o$$
$$\tan\alpha = \mu_o$$
$$\alpha = \arctan\mu_0$$
$$= \arctan 0{,}6$$
$$\alpha = 30{,}9637...°$$
$$\underline{\underline{\alpha \approx 31°}}$$




**3.2** Wenn $F_H > F_R$, wird der Körper nur noch von der Gleitreibungskraft gebremst. Der Körper wird hangabwärts beschleunigt. Der Beschleunigung entgegen wirkt die Trägheitskraft $F_T$.




$$F_T + F_R = F_H$$
$$F_T = F_H - F_R$$
$$= F_H - F_R$$
$$= F_H - \mu \cdot F_N$$
$$m \cdot a = F_g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot F_g \cdot \cos\alpha$$
$$= F_g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$
$$m \cdot a = m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$
$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

Diese Gleichung sollten Sie als Formel in Ihr Tabellenbuch übernehmen (Schiefe Ebene)

Lösung zu 3.2 (Forts.)

$$a = 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (\sin 31° - 0{,}4 \cdot \cos 31°)$$

$$= 1{,}688999\frac{m}{s^2}$$

$$\approx 1{,}69\frac{m}{s^2}$$

Zur Berechung der Geschwindigkeit wird das v-t-Diagramm skizziert (vgl. Abb. rechts).

Die Fläche für den zurückgelegten Weg ist ein Dreieck. Draus folgt:

① $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$

Mit dieser Gleichung kann v noch nicht berechnet werden, da neben *v* auch die Zeit *t* unbekannt ist. Aus der Funktion für *v* folgt aber mit $v_0 = 0$:

$$v = a \cdot t$$

② $t = \frac{v}{a}$

Wir setzen den Ausdruck $t = \frac{v}{a}$ in den Term ① ein und können dann *v* berechnen:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{v}{a}$$

$$= \frac{v^2}{2 \cdot a}$$

$$2 \cdot a \cdot s = v^2$$

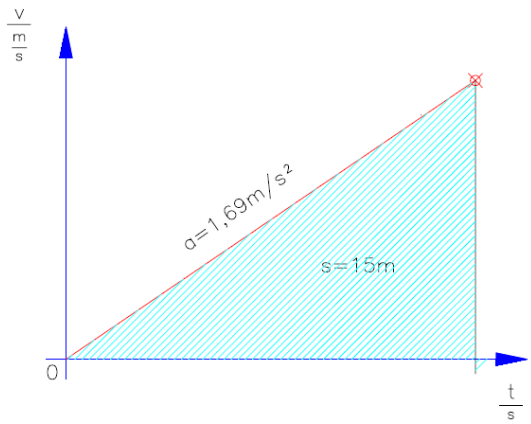
$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

$$\approx \sqrt{2 \cdot 1{,}69\frac{m}{s^2} \cdot 15m}$$

$$\approx \sqrt{50{,}7\frac{m^2}{s^2}}$$

$$\approx 7{,}12\frac{m}{s}$$




v-t-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit $v_0 = 0$.

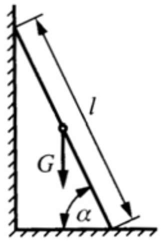
**Lösungshinweis/e:**

Die Fläche im v-t-Diagramm stellt den zurückgelegten Weg dar.

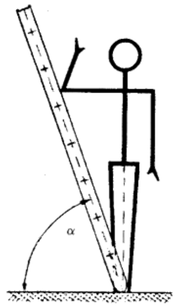
Für die Geschwindigkeit gilt die lineare Funktion: $v = a \cdot t + v_0$

*Diese Formel finden Sie auch im Tab.-Buch, S. 34, d. h. Sie müssen sie nicht herleiten.*

**4**

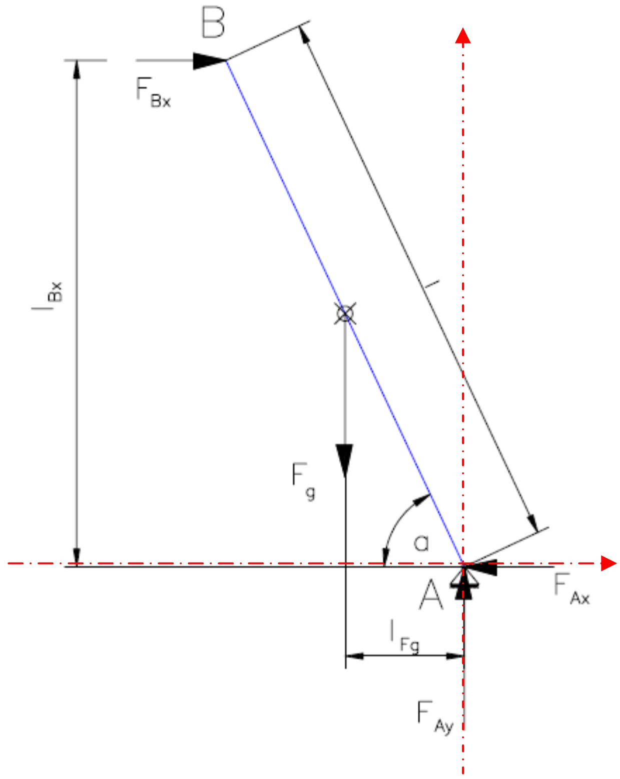



Ein Balken, der reibungslos an einer Wand lehnt, stützt sich gegen den Fußboden mit der Reibungszahl $\mu$. Wie groß muss der Winkel $\alpha$ mindestens sein, damit der Balken nicht wegrutscht?




$\alpha$ = 60 bis 70° bei Stufenanlegeleitern
$\alpha$ = 65 bis 75° bei Sprossenanlegeleitern

Lösung




①
$$\sum F_x = 0$$
$$-F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$
$$F_{Ax} = F_{Bx}$$

②
$$\sum F_y = 0$$
$$F_{Ay} - F_g = 0$$
$$F_{Ay} = F_g$$

③
$$\sum M_{(A)} = 0$$
$$F_{Bx} \cdot l_{Bx} - F_g \cdot l_{Fg} = 0$$
$$F_{Bx} \cdot l_{Bx} = F_g \cdot l_{Fg}$$
$$F_{Bx} = \frac{F_g \cdot l_{Fg}}{l_{Bx}}$$
$$= \frac{F_g \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos\alpha}{l \cdot \sin\alpha}$$
$$= \frac{F_g \cdot l \cdot \cos\alpha}{2 \cdot l \cdot \sin\alpha}$$
$$F_{Bx} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}$$

Aus ① und ③ folgt

④ $$F_{Ax} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}.$$

Nun ist $F_{Ax}$ gleich der Haftreibungskraft $F_{R0}$, da nur diese Kraft das Wegrutschen der Bohle verhindert. Die zugehörige Normalkraft ist gleich dem Betrag von $F_{Ay}$. Daraus folgt:

$$F_{Ro} = F_{Ax} = \frac{F_g}{2 \cdot \tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_g}{2 \cdot F_{R0}} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_N} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_{Ay}} = \frac{F_g}{2 \cdot \mu_0 \cdot F_g} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0}$$

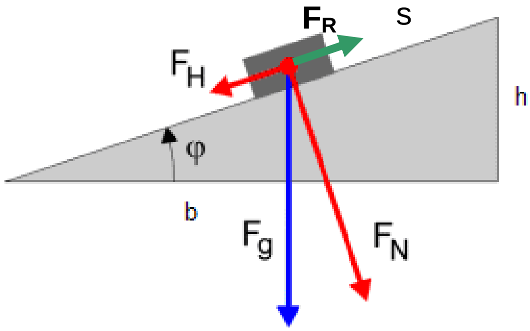
$$\alpha = \arctan\frac{1}{2 \cdot \mu_0}$$

**5.1** Ein Kind mit einer Masse von 40 kg rutsche eine Rutschbahn hinunter, die einen Neigungswinkel von 30° zur Horizontalen besitzt. Die Gleitreibungszahl zwischen Kind und Rutschbahn sei $\mu = 0.2$. Wenn das Kind in einer Höhe von 4 m zu rutschen beginnt, wie schnell bewegt es sich dann, wenn es den Boden erreicht? Machen Sie eine Skizze und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein!

**5.2** Welche Arbeit hat die Gravitationskraft beim Rutschen am Kind geleistet und welche Arbeit ist durch die Reibung in Wärme umgewandelt worden?

Lösungen

**5.1** **a) Länge der Rutsche**




$$\sin\rho = \frac{GK}{HY} = \frac{h}{s}$$

$$h = s \cdot \sin\rho$$

$$s = \frac{h}{\sin\rho} = \frac{4\,m}{\sin 30°}$$

$$= \frac{4\,m}{0{,}5} = \frac{4\,m}{\frac{1}{2}} = 4\,m \cdot \frac{2}{1} \underline{\underline{= 8\,m}}$$

**b) Erreichte Geschwindigkeit**

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot s}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot \frac{h}{\sin\rho}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot (\sin\rho - \mu \cdot \cos\rho) \cdot \frac{1}{\sin\rho}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\sin\rho}{\sin\rho} - \frac{\mu \cdot \cos\rho}{\sin\rho}\right)}$$

$$\frac{\mu \cdot \cos\rho}{\sin\rho} = \frac{\mu}{\frac{\sin\rho}{\cos\rho}} = \frac{\mu}{\tan\rho}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\tan\rho}\right)}$$

Bedingung für $v > 0$:
$h > 0$ und

$$1 - \frac{\mu}{\tan\rho} > 0$$

$$1 > \frac{\mu}{\tan\rho}$$

$$\tan\rho > \mu$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(1 - \frac{0{,}2}{\tan 30°}\right)}$$

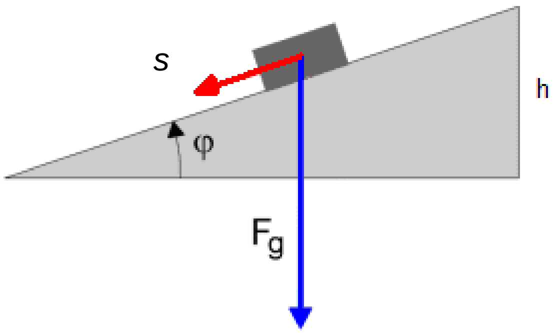
$$= 7{,}16196... \frac{m}{s} \approx \underline{\underline{7{,}2 \frac{m}{s}}}$$

c) Kinetische Energie des Kindes beim Erreichen des Bodens:

$$W_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{40\,kg \cdot \left(7{,}16196... \frac{m}{s}\right)^2}{2} \approx 1025{,}9\,J$$

**5.2 a) Verrichtete Arbeit der Gravitationskraft**

$$
\begin{aligned}
W &= F_g \cdot s \cdot \cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{F_g}, \vec{s}\right) \\
&= F_g \cdot s \cdot \cos\left(90° - \rho\right) \\
&= F_g \cdot s \cdot \sin \rho \\
&= F_g \cdot h \\
&= m \cdot g \cdot h \\
&= 40\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 4\ m \\
&= 1569{,}6\ Nm \\
&\approx \underline{\underline{1{,}57\ kJ}}
\end{aligned}
$$




**b) Reibungsarbeit ⇨ Wärme**

$$
\begin{aligned}
W_R &= F_R \cdot s \cdot \cos 180° \\
&= \mu \cdot F_N \cdot s \cdot (-1) \\
&= -\mu \cdot F_g \cdot \cos \rho \cdot s \\
&= -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \rho \cdot \frac{h}{\sin \rho} \\
&= -m \cdot g \cdot h \cdot \frac{\mu \cdot \cos \rho}{\sin \rho} \\
&= -m \cdot g \cdot h \cdot \frac{\mu}{\tan \rho} \\
&= -40\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 4\ m \cdot \frac{0{,}2}{\tan 30°} \\
&= -543{,}7253...\ Nm \\
&\approx \underline{\underline{-544\ J}}
\end{aligned}
$$

**c) Zusammenfassung**

Arbeit bewirkt Änderung von Energie. Die Addition der beiden nach 5.2.a und 5.2.b berechneten Arbeiten muss gleich der nach 5.1.c berechneten gewonnenen kinetischen Energie sein:

1569,6 J + (- 544 J) = 1025,9 J = 1025,9 J